Adı: **Soyadı:** **No:** **20.11.2019**

Stokastik Süreçler I Arasınav Soruları

1) λ parametreli Poisson sürecinde $t_1 < t_2$ için aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu ispatlayınız.

$$V\left(X_{t_1}\right) = Cov(X_{t_1}, X_{t_2})$$

2) $\{X_t, t \geq 0\}$ λ parametreli Poisson süreci olsun. t_{n-1} ve t_n iki ardışık geliş anı olmak üzere ilişki katsayısı $\rho(t_{n-1}, t_n)$ bulunuz.

3) Bir bankanın Ankara'daki bir şubesinde bir başka şubesine gelen telefon konuşmaları $\lambda = 3$ olan bir Poisson sürecine uyuyor. Buna göre,

a) $P(N_3 = 3, N_4 = 4, N_5 = 5)$ olasılığını
b) $P(N_3 = 3/N_4 = 4, N_5 = 5)$ olasılığını
c) $P(N_3 = 3, N_4 = 4/N_5 = 5)$ olasılığını
d) Üçüncü konuşma ile dördüncü konuşma arasında geçen sürenin 3 dakikadan fazla olması olasılığını
e) Üçüncü konuşmanın ikinci dakika içinde gelmesi olasılığını bulunuz.

4) $S_n \sim B(n, p)$ olmak üzere aşağı verilen eşitliği doğrulayınız.

$$E(S_7 S_{10} | S_5 = 3) = 8p^2 + 23p + q$$

Not: Dört sorudan üçü yapılacaktır. Her sorunun puanı eşittir.

Başarılar Dileriz.

Prof. Dr. Vedat SAĞLAM

Arş. Gör. Emre YILDIRIM

20/11/2019

STOKASTİK SÜREÇLER I ARASINAV SORULARININ CEVAPLARI

1) $V(X_{t_1}) = E(X_{t_1}^2) - [E(X_{t_1})]^2 \quad \ldots (1)$

$$E(X_{t_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^k}{(k-1)!} = (\lambda t_1) e^{-\lambda t_1} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t_1)^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\lambda t_1}} = \lambda t_1 e^{-\lambda t_1} e^{\lambda t_1} = \lambda t_1 \ldots (2)$$

$$E(X_{t_1}^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1)+k] \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^k}{k!} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^k}{k!}}_{E(X_{t_1}) = \lambda t_1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^k}{(k-2)!} + \lambda t_1$$

$$= (\lambda t_1)^2 e^{-\lambda t_1} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t_1)^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^{\lambda t_1}} + \lambda t_1 = (\lambda t_1)^2 . e^{-\lambda t_1} e^{\lambda t_1} + \lambda t_1$$

$$= (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 \quad \ldots (3)$$

(2) ve (3) sonucunu (1)'de yerine yazarsak,

$$V(X_{t_1}) = (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 - (\lambda t_1)^2 = \lambda t_1 \quad \ldots (1)$$

$$Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = E(X_{t_1} X_{t_2}) - E(X_{t_1}) E(X_{t_2}) = E[X_{t_1}(X_{t_2} - X_{t_1}) + X_{t_1}^2] - E(X_{t_1}) E(X_{t_2})$$

$$= E[X_{t_1}(X_{t_2} - X_{t_1})] + E[X_{t_1}^2] - E(X_{t_1}) E(X_{t_2})$$

$$= E(X_{t_1}) E(X_{t_2} - X_{t_1}) + E(X_{t_1}^2) - E(X_{t_1}) E(X_{t_2})$$

$$= (\lambda t_1)(\lambda t_2 - \lambda t_1) + (\lambda t_1)^2 + (\lambda t_1) - (\lambda t_1)(\lambda t_2)$$

$$= \cancel{\lambda^2 t_1 t_2} - \cancel{(\lambda t_1)^2} + \cancel{(\lambda t_1)^2} + (\lambda t_1) - \cancel{\lambda^2 t_1 t_2}$$

$$= \lambda t_1 \quad \ldots (2)$$

(1) ve (2) eşitliklerinden

$$V(X_{t_1}) = Cov(X_{t_1}, X_{t_2})$$

sonucuna ulaşılır.

2) t_n gamma dağıldığından

$$V(t_{n-1}) = \frac{n-1}{\lambda^2} \qquad V(t_n) = \frac{n}{\lambda^2}$$

$$V(t_n - t_{n-1}) = V(t_n) + V(t_{n-1}) - 2Cov(t_{n-1}, t_n) \quad \dots (*)$$

$T_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$ için alındığında $(*)$ eşitliğinin sol tarafı Poisson sürecinin 2. özelliğinden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$V(t_n - t_{n-1}) = V(T_n) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \dots (**)$$

$(**)$ eşitliğini $(*)$ eşitliğinde yerine yazarsak.

$$V(t_n - t_{n-1}) = V(t_n) + V(t_{n-1}) - 2Cov(t_{n-1}, t_n)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2} + \frac{n-1}{\lambda^2} - 2Cov(t_{n-1}, t_n)$$

$$2Cov(t_{n-1}, t_n) = \frac{2(n-1)}{\lambda^2}$$

$$Cov(t_{n-1}, t_n) = \frac{n-1}{\lambda^2}$$

$$\rho(t_{n-1}, t_n) = \frac{Cov(t_{n-1}, t_n)}{\sqrt{V(t_{n-1})V(t_n)}} = \frac{\frac{n-1}{\lambda^2}}{\sqrt{\frac{n-1}{\lambda^2} \cdot \frac{n}{\lambda^2}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

Asimptotik olarak $\lim_{n \to \infty} \rho(t_{n-1}, t_n) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1$ olur.

3)

a) $P(N_3=3, N_4=4, N_5=5) = P(N_3=3, N_1=1, N_1=1)$

$$= P(N_3=3)\,P(N_1=1)\,P(N_1=1)$$

$$= \frac{e^{-9}\,9^3}{3!}\,\frac{e^{-3}\,3^1}{1!}\cdot\frac{e^{-3}\,3^1}{1!} = \frac{e^{-15}\,3^8}{6} = 0.000335$$

b) $P(N_3=3 / N_4=4, N_5=5) = \dfrac{P(N_3=3, N_1=1, N_1=1)}{P(N_4=4, N_1=1)} = \dfrac{P(N_3=3)P(N_1=1)\cancel{P(N_1=1)}}{P(N_4=4)\cancel{P(N_1=1)}}$

$$= \frac{\frac{e^{-9}\,9^3}{3!}\cdot\frac{e^{-3}\,3^1}{1!}}{\frac{e^{-12}\,12^4}{4!}} = \frac{3^3}{2^6} = 0{,}4218$$

c) $P(N_3=3, N_4=4 / N_5=5) = \dfrac{P(N_3=3, N_1=1, N_1=1)}{P(N_5=5)} = \dfrac{P(N_3=3)P(N_1=1)P(N_1=1)}{P(N_5=5)}$

$$= \frac{0.000335}{\frac{e^{-15}\,15^5}{5!}} = 0{,}1728$$

d) $P(T>3) = 1-P(T\leq 3) = 1-\left[\int_0^3 3e^{-3t}\,dt\right]$

$$= 1 + e^{-9} - e^{0} = 0{,}000123_{,,}$$

e) $P(N_2=3) = \dfrac{e^{-6}\,6^3}{3!} = 0{,}089_{,,}$

4) $S_{n+k} - S_k \sim S_n$ olduğu dikkate alınırsa

$$E(S_7 S_{10} \mid S_5 = 3) = E[(S_7 - S_5 + 3)(S_{10} - S_5 + 3) \mid S_5 = 3]$$

$$= E[(S_2+3)(S_5+3)] = \underbrace{E[S_2 S_5]}_{(*)} + 3E(S_2) + 3E(S_5) + 9$$

(*) $E(S_2 S_5) = E(S_2(S_5 - S_2) + S_2^2) = E(S_2 S_3 + S_2^2) = E(S_2)E(S_3) + \underbrace{E(S_2^2)}_{(**)}$

$V(S_2) = E(S_2^2) - [E(S_2)]^2 = 2pq = E(S_2^2) - 4p^2 \Rightarrow E(S_2^2) = 2pq + 4p^2 \ldots (***)$

(***) eşitliği (**)'de yerine yazılırsa,

$$E(S_2 S_5) = E(S_2)E(S_3) + 2pq + 4p^2$$

elde edilir ve bu eşitlik (*)'da yerine yazılırsa

$$E(S_7 S_{10} \mid S_5 = 3) = E(S_2)E(S_3) + 2pq + 4p^2 + 6p + 15p + 9$$

$$= 2p * 3p + 2pq + 4p^2 + 6p + 15p + 9$$

$$= 10p^2 + 21p + 2pq + 9$$

$$= 8p^2 + 23p + 9$$,,,